Устойчивост на Слънчевата система

Ангел Живков
ФМИ, Софийски университет

Научна конференция „Диференциални уравнения и математически модели в икономиката“, в памет на доцент Йордан Йорданов

ИМИ–БАН, София, 27-28 февруари 2023

Юсуке Хагихара, дългогодишен президент на Американското астрономическо общество, формулира най–важните въпроси в Небесната механика така (Hagihara Yusuke, Celestial Mechanics, The MIT Press, 1972):

“Will be present configuration of the solar system be preserved without radical changes for a long interval of time?”

“What is the interval of time, at the end of which the configuration of the planetary orbits deviates from the present by a given small amount?”

По–нататък Хагихара твърди:

“ ... present mathematics hardly permit this question to be answered satisfactory for the actual solar system.”

Уравнения на движение

Ще разглеждаме Слънцето, Меркурий, Венера, Земя+Луна, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун като точкови маси, движещи се съгласно Нютоновия “inverse–square law of gravitation”.

Ще считаме, че масата на Слънцето е 1, а масите на планетите са относителните

$$\mu_j \ := \ \frac{\text{масата на j-тата планета}}{\text{масата на Слънцето}} \ .$$

За единица на разстояние фиксираме средното разстояние между Земята и Слънцето (около 150 милиона километра), т.е. 1AU (една астрономическа единица).

Тогава време $t = 2\pi$ съответства на една юлианска година, т.е. 365 дена и 6 часа.

Ако означим с $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ координатите на $j-$тата планета в **хелиоцентрична координатна система**, то нейното движение се определя с три ОДУ от втори ред:

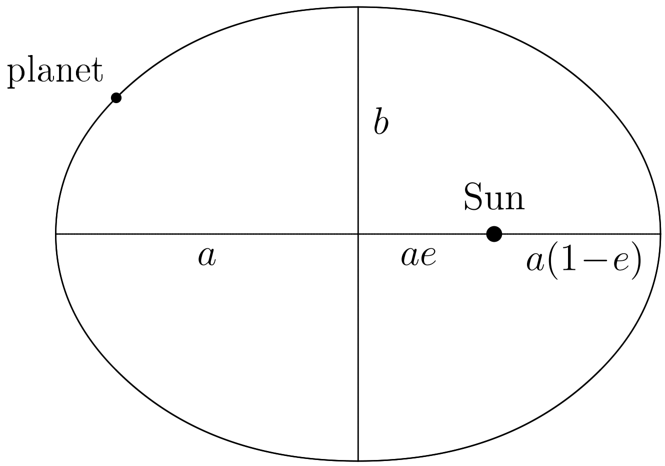
$$\ddot{\mathbf{r}}_j = -(1+\mu_j)\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} + \frac{\partial R_j}{\partial \mathbf{r}_j}, \qquad j = 1, \ldots, 8 .$$

Тук $\frac{\partial R_j}{\partial \mathbf{r}_j} = \left(\frac{\partial R_j}{\partial x_j}, \frac{\partial R_j}{\partial y_j}, \frac{\partial R_j}{\partial z_j}\right)$ е градиентът на пертурбационната функция

$$R_j \ := \ \sum_{s \neq j} \mu_s \left[\frac{1}{(\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_s\mathbf{r}_s - 2\mathbf{r}_j\mathbf{r}_s)^{1/2}} - \frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_s}{r_s^3} \right],$$

където $\mathbf{r}_b\mathbf{r}_c := x_b x_c + y_b y_c + z_b z_c$ и $r_j^2 := x_j^2 + y_j^2 + z_j^2$ е квадратът на разстоянието от планетата до Слънцето.

Съгласно първия закон на Кеплер, орбитата на всяка планета е елипса в $\mathbb{R}^3$ и Слънцето е в един от фокусите на тази елипса.



$a =$ semi-major axis
$e =$ eccentricity $\in [0, 1)$
$b = a\sqrt{1 - e^2}$
$=$ semi-minor axis

Тези елипси оскулират, т.е. се менят бавно с времето, „целувайки“ предшестващите ги.

Орбитата на всяка планета се определя от 6 *орбитални елемента*:

a – главна полуос	$l = n\cdot(t - t_0)$ – средна аномалия
e – ексцентрицитет	g – аргумент на перихелия
i – наклоненост на орбитата	θ – дължина на възела

Средното движение n и главната полуос a са свързани с Третия закон на Кеплер:

$$n^2 a^3 = 1 + \mu \ .$$

Относителните маси на планетите са $< 10^{-3}$, вследствие на което орбиталните елементи a, e, i, g, θ и времето на преминаване през перихелия t_0 варират бавно, докато средната аномалия $l = n\cdot(t - t_0)$ е почти линейна по времето t функция.

Пропускайки индекса на съответната планета, координатите ѝ в $\mathbb{R}^3$ са

$$\frac{\boldsymbol{r}}{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix},$$

където (aX, aY) е Кеплеровото движение,

$$X := \cos u - e\,, \qquad Y := \sqrt{1-e^2}\sin u\,, \qquad l := u - e\sin u\,.$$

От последното – наречено уравнение на Кеплер, изразяваме ексцентричната аномалия u като функция на средната аномалия l.

За скоростта на планетата $\dot{\boldsymbol{r}}$ трябва да заменим X с $\frac{\partial X}{\partial l}$ и Y с $\frac{\partial Y}{\partial l}$ в горната формула за $\boldsymbol{r}$.

След смяната на променливите $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ с шесте орбитални елемента, уравненията на движение на планета приемат вида

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= 2\sqrt{a}\, R_l\ , & \dot{l} &= n - 2\sqrt{a}\, R_a - \frac{1-e^2}{e\sqrt{a}} R_e\ , \\
\dot{e} &= \frac{(1-e^2)R_l - \sqrt{1-e^2} R_g}{e\sqrt{a}}\ , & \dot{g} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} R_e - \frac{\cot i}{\sqrt{a(1-e^2)}}\, R_i\ , \\
\dot{i} &= \frac{\cos i\,.\, R_g - R_\theta}{\sqrt{a(1-e^2)}\, \sin i}\ , & \dot{\theta} &= \frac{R_i}{\sqrt{a(1-e^2)}\, \sin i}\ ,
\end{aligned}
$$

виж например книгата Brower D., Clemence G., *Methods in Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London (1961)., p. 289.

Това са общо 48 ОДУ от първи ред.

Оценка на вариацията на орбиталните елементи

Всяка система от ОДУ е еквивалентна на система от интегрални уравнения:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}(T) \;=\; \mathbf{x}(0) \;+\; \int\limits_0^T \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]\, dt \;.$$

В частност е в сила грубата оценка

$$||\, \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}(0)\, || \;\;\leq\;\; |T| \sup_{0 \leq t \leq T} ||\, \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)]\, ||\, .$$

Ако приложим тази груба оценка към първоначалната система от 24 ОДУ от втори ред - но приведена към система от 48 ОДУ от първи ред, ще получим съвсем слаб резултат:

ако Меркурий спре движението си по елипса, то той ще падне на Слънцето за около една седмица.

Значително по–сериозен резултат получаваме като приложим същата груба оценка, но в уравненията за орбиталните елементи.

От значение са променливите действие a, e и i,

$$\dot{a} \ = 2\sqrt{a}\, R_l \ , \quad \dot{e} \ = \frac{(1-e^2)R_l - \sqrt{1-e^2}R_g}{e\sqrt{a}} \ , \quad \dot{i} \ = \frac{\cos i \,.\, R_g - R_\theta}{\sqrt{a(1-e^2)}\, \sin i}\,.$$

Да напомним, че пертурбацията на j-тата планета е сума от гравитационните ефекти, причинени от останалите 7 планети:

$$R_j \ := \ \sum_{s\neq j} \mu_s \left[\frac{1}{(\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_s\mathbf{r}_s - 2\mathbf{r}_j\mathbf{r}_s)^{1/2}} - \frac{\mathbf{r}_j\mathbf{r}_s}{r_s^3} \right] \ ,$$

$$\left[\mu_1^{-1}, \ldots, \mu_8^{-1}\right] \approx \left[6\cdot 10^6, 408523, 328900, 3\cdot 10^6, 1047, 3497, 22903, 19412\right].$$

Нептун: a_9 намалява на моменти с 1AU за 150 години, заради неинерциалната хелиоцентрична координатна система.

W. M. Smart, *Celestial Mechanics*, 1953: „поне 300 години устойчивост“.

Периодични пертурбации

Развиваме пертурбацията на $j-$тата планета в двойни редове на Фурие по бързите променливи, т.е. по средните аномалии l:

$$\begin{aligned} R_j &= \sum_{s \neq j} \mu_s \left[\frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_s|} - \frac{\mathbf{r}_j \mathbf{r}_s}{r_s^3} \right] \\ &= \sum_{s \neq j} \mu_s \left[A_{00}^{(j,s)} + \sum_m \sum_k A_{m,k}^{(j,s)} \cos(m l_j - k l_s) \right], \end{aligned}$$

където сумирането е по цели неотрицателни m и цели k.

В уравненията за орбиталните елементи заместваме пертурбациите R_j с техните редове на Фурие. Вариациите на орбиталните елементи стават сума от вариациите от отделните хармоники.

Ако

$$A\cos\phi = A\cos[(mn_j - kn_s)t + c]$$

е една от тези хармоники, то след интегриране по части

$$\begin{aligned}\int_0^T A\cos\phi\,dt &= \int_0^T \frac{A}{\dot\phi}\,d\sin\phi \\ &= \left.\frac{A\sin\phi}{mn_j - kn_s}\right|_0^T + \int_0^T \frac{A\ddot\phi - \dot A\dot\phi}{(mn_j - kn_s)^2}\,\sin\phi\,dt\,.\end{aligned}$$

Първото събираемо е много пъти по-малко от T. Производната на амплитудата $|\dot A| < 10^4 A$, както и $|\ddot\phi| < 10^{-3}$.

Близки до резонансни случаи $mn_j - kn_s \approx 0$ възникват при достатъчно големи m и k. Но тогава избягваме малките знаменатели $(mn_j - kn_s)^2$ като се връщаме към тривиалната (груба) оценка

$$\left| \int_0^T A \cos \phi \, dt \right| \leq T \sup |A|$$

и използваме факта, че амплитудата A намалява експоненциално бързо с нарастването на m и k.

След подробни оценки на амплитудите на пертурбиращите функции R_j и на техните производни заключаваме, че времето за устойчивост на Слънчевата система достига поне 10 000 години.

Секулярни пертурбации

Описаната до тук процедура води до изключване на бързите променливи l_j дори за повече от един милион години.

Но в редовете на Фурие

$$R_j \;=\; \sum_{s\neq j}\mu_s\Big[A_{00}^{(j,s)}+\sum_m\sum_k A_{m,k}^{(j,s)}\cos(ml_j-kl_s)\Big],$$

остава да отчетем и усредняването на R_j, т.е. коефициентите

$$A_{00}^{(j,s)} \;=\; \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dl_j\,dl_s}{(\mathbf{r}_j\mathbf{r}_j+\mathbf{r}_s\mathbf{r}_s-2\mathbf{r}_j\mathbf{r}_s)^{1/2}}\ .$$

За големите полуоси a_j няма секулярни пертурбации (Лаплас). Следователно, вариациите на $(e_j, g_j, i_j, \theta_j)$ се задават като в диференциалните им уравнения заменим

$$R_j \qquad \text{със} \qquad \sum_{s\neq j} \mu_s A_{00}^{(j,s)}$$

Получаваме система от 32 ОДУ от вида

$$\dot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})\ ,$$

където $\mathbf{M}$ е константна (32×32)–матрица с различни и чисто имагинерни собствени числа, а вектор–функцията $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ съдържа членове от 3-та, 5-та и.т.н нечетни степени по ексцентрицитетите и наклоненостите.

Линейната системата $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ е решена от Stockwell през 1872 по метод, измисен специално за целта от Якоби. Ексцетрицитетите и наклоненостите са квазипериодични и следователно огреничени функции, а променливите ъгъл са чисто линейни.

Точната, нелинейна система има очевидно решение

$$\mathbf{x}(t) \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{M}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\mathbf{M}\tau}\mathbf{f}[\mathbf{x}(\tau)]d\tau\,.$$

Пресмятаме явно третите по степените на e и i членове в развитието по Тейлър на $\mathbf{f}$ - те са достатъчно малки. Оценяваме петите и т.н. нечетни степени, а с това и възможните вариации на ексцентрицитетите и наклоненостите на планетите.

След някои допълнителни разсъждения и оценки доказваме следната

Теорема. Да приемем, че астрономическите данни за масите и орбиталните елементи на осемте главни планети от Слънчевата система имат относителна неточност 10^{-4}.

Тогава Слънчевата система е стабилна поне за 100 000 години в смисъл, че главните полуоси на планетите варират с до 1% спрямо сегашните си стойности, а ексцентрицитетите и наклоненостите им остават ограничени.

Don't worry! Be happy!