Копули в Соболеви пространства

Николай Червенов

26 февруари 2023 г.

Научна конференция "Диференциални уравнения и математически модели в икономиката"

КОПУЛИ В СОБОЛЕВИ ПРОСТРАНСТВА

д-р Николай Червенов

Главен актюер в BNP PARIBAS CARDIF *Bulgaria and Romania*

nchervenov@uni-sofia.bg

nikolay.chervenov@cardif.com

Теорема на Склар

Теорема на Склар. Нека $H(x, y)$ е съвместното вероятностно разпределение на две случайни величини X и Y с маргинали $F(x)$ и $G(y)$. Тогава съществува копула $C(u, v)$ такава, че

$$H(x, y) = C\big(F(x), G(y)\big).$$

Ако F и G са непрекъснати функции, то копулата е единствена.

Вярно е и обратното твърдение.

Дефиниция на копула.

Копулите са двумерни функции на разпределение върху $[0,1] \times [0,1]$, чиито маргинали са равномерно разпределени върху $[0,1]$.

или

Функцията $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ се нарича двумерна копула, ако

- За всяко $(u,v) \in [0,1] \times [0,1]$
  $C(u,0) = 0 = C(0,v), C(u,1) = u, \ C(1,v) = v;$
- $C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0$, за
  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ и $0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$.

Проблеми.

Веднага можем да отбележим основните два проблема на копулите:

1. Как да проверим дали дадена функцията е 2-растяща (обикновено граничните условия са тривиални)?
2. Как да конструираме нова копула?

Копулата като решение на диференциално уравнение.

Как можем да построим копула изхождайки от зададена вероятностна плътност $f = \partial_{uv} C$ използвайки понятието *слаба производна*?

Търсим решение на следната гранична задача

$$\begin{aligned}
&\partial_{uv} C(u, v) = f(u, v) \text{ в } I^2 \text{ (слаб смисъл) };\\
&C(u, 0) = 0 = C(0, v);\\
&C(u, 1) = u,\ C(1, v) = v,\ \text{за всички } u, v \in I,
\end{aligned}$$

като ще наложим условия върху дясната страна f, тъй като така зададена, задачата не е коректна (няма единствено решение); $I = [0, 1]$.

Ще разгледаме първо случая, когато $f \in C^0(I^2)$, а след това и по-общия случай, когато $f \in W^{-1,p}(I^2)$, $p > 2$.

Нека $H : G \subset \overline{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ и нека

$$B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset G$$

е произволен правоъгълник.

H-обем на правоъгълника B е числото

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Дефиниция. *H се нарича 2-растяща функция в G, ако $V_H(B) \geq 0$ за всеки правоъгълник B, чиито върхове принадлежат на G.*

Когато частните производни H_x, H_y, H_{xy} съществуват и принадлежат на $C^0(\mathbb{R}^2)$, е изпълнено

$$V_H(B) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[H(x_2, \eta) - H(x_1, \eta)\right] d\eta = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

2-Растящи функции. Обобщен случай.

Дефиниция (нова). Ще наричаме едно разпределение $H \in \mathscr{D}'$ слабо 2-растящо, ако за всяка тест функция $\varphi \geq 0$ от $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\left(H_{xy}, \varphi\right) \geq 0.$$

Твърдение. Нека $H \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2) \cap C^0(\mathbb{R}^2)$ е слабо 2-растящо разпределение. Тогава H е 2-растящо в обичайния смисъл, т.е. $V_H(B) \geq 0$, за всеки правоъгълник $B \in \mathbb{R}^2$.

2-Растящи функции. Обобщен случай. Примери

1. Да разгледаме функцията $f : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ зададена с

$$f(u,v) = \max(u,v).$$

Пресмятаме

$$\Big(\partial_{uv} f, \varphi\Big) = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_S, \varphi\Big) \le 0.$$

Следователно f не е 2-растяща функция.

2. За копулата Фреше-Хьофдинг долна граница, зададена с

$$W(u,v) = \max[u+v-1, 0],$$

проверяваме, че е две-растяща функция, тъй като

$$\Big(\partial_{uv} W, \varphi\Big) = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_S, \varphi\Big) \ge 0.$$

n-Растящи функции. Дефиниция

Нека $H : G \subset \overline{\mathbb{R}}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ и нека

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset G$$

е произволен n-мерен паралелепипед, чиито върхове са точките $(c_1, \dots, c_n)$, където c_k е равно или на a_k или b_k, за $k = 1, \dots, n$.

H-обем на паралелепипеда B се задава с израза

$$V_H(B) = \sum sgn(c_1, \dots, c_n)\, H(c_1, \dots, c_n),$$

където сумата е взета по всички върхове на B, и

$$sgn(c) = \begin{cases} 1, & \text{ако } c_k = a_k \text{ за четен брой стойности на k} \\ -1, & \text{ако } c_k = a_k \text{ за нечетен брой стойности на k} . \end{cases}$$

Дефиниция. H се нарича n-растяща функция в G, ако $V_H(B) \geq 0$ за всеки паралелепипед B, чиито върхове лежат в G.

n-Растящи функции. Обобщени дефиниции

За гладка функция H имаме

$$V_H(B) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \cdots \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} H(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n.$$

Дефиниция (нова - 1). Нека $G \subset \mathbb{R}^n$ е област. Разпределението $H \in \mathscr{D}'(G)$ се нарича слабо n-растящо разпределение в G, ако за всяка неотрицателна тестова функция $\varphi \in \mathscr{D}$ е изпълнено

$$\left(H_{x_1,\dots,x_n}, \varphi\right) \geq 0.$$

Дефиниция (нова - 2). Нека $G \subset \mathbb{R}^n$ е област такава, че контурът ѝ ∂G удовлетворява условието за сегмента. Тогава ще казваме, че $H \in W^{1,p}(G)$ е слабо n-растяща функция в G, ако

$$(-1)^n (H, f_{x_1 \cdots x_n}) \geq 0,$$

за всяка функция $0 \leq f \in W^{n-1,p}(G)$.

n-Растящи функции. Забележки

- Ако H е непрекъсната, то трите дефиниции са еквивалентни.
- Можем да предполагаме $f \in C_0^\infty(G)$, тъй като $C_0^\infty(G)$ е гъсто в $W^{n,p}(G)$.
- Нека $H_m \in W^{1,p}(G)$ е слабо n-растяща функция в $G \subset \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, и $H_m \to H \in W^{1,p}(G)$. Тогава H е слабо n-растяща в G.
- Нека за областите е изпълнено $G_m \subset G \subset \mathbb{R}^n, m = 1, 2, \dots$, и $mes\big(G \setminus G_m\big) \to 0$ за $m \to \infty$. Тогава, ако $H \in W^{1,p}(G)$ е слабо n-растяща функция в G_m, то H е слабо n-растяща функция в G.
- При проверка следвайки дефиницията (нова - 2), за да пресмятаме само класически производни, а не слаби, прехвърляме производните на f върху H с помощта на формулата на Гаус. Можем да считаме, че f и производните ѝ се анулират върху стените на куба $[0, 1]^n$ минаващи през $(1, \dots, 1)$.

n-Растящи функции. Пример

Да разгледаме Фреше-Хьофдинг долна граница за $n \geq 3$

$$W^n(x_1, \cdots, x_n) = \max[x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1, 0].$$

Очевидно, $W^n(x_1, \cdots, x_n) \geq 0$ полупространството $\mathscr{S}$ определено от равнината

$$S = \big\{(x_1, \cdots, x_n) \in I^n \mid x_1 + \ldots + x_n - n + 1 = 0\big\},$$

което не съдържа $(0, \ldots, 0)$. Избираме $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k, & \text{ако } n \text{ е нечетно },\\ \displaystyle(1 - x_1)\prod_{k=2}^{n} x_k, & \text{ако } n \text{ е четно },\end{cases}$$

и следователно пресмятаме

$$(-1)^n (W^n, f_{x_1 \cdots x_n}) < 0, \text{ в } \mathscr{S}.$$

Построяване на копули. Теорема за единственост за $n = 2$

Теорема [Йорданов - Червенов]. Нека $C \in W^{1,p}(I^2)$, $p > 2$ е решение на задачата

$$\partial_{uv} C = f(u,v), \ \ u, v \in I,$$

където $f \in L_p(I^2)$ и равенството е в слаб смисъл, т.е.

$$\big(C_{uv}, \varphi\big) = (f, \varphi),$$

за всяко $\varphi \in \widetilde{W}^{1,p}(I^2) = \big\{w \in W^{1,p}(I^2) \,\big|\, w|_{u=0} = w|_{v=0} = 0\big\}$. Нека освен това

$$C(u,0) = 0 = C(0,v), C(u,1) = u, \ C(1,v) = v, \ \ u, v \in I,$$

Тогава съществува константа M, която не зависи от f, такава че

$$\|C\|_{W^{1,p}(I^2)} \leq M \, \|f\|_{L_p(I^2)}.$$

Построяване на копули. Теорема за единственост за $n = 2$. Следствие

- Решението на задачата е единствено.
- Когато решението $C \in W^{1,p}(I^2)$, а $C_{uv} \in W^{-1,p}(I^2)$, отново е валидна теоремата за единственост, тъй като $f = 0 \in L_p(I^2)$.
- Теорема всъщност ни дава непрекъснатост на решението C по отношение на дясната страна f.

Построяване на копули. Теорема за съществуване за $n = 2$. Гладък случай

Теорема [Йорданов - Червенов]. Съществува решение $C(u, v) \in W^{1,p}(I^2)$ на задачата

$$\partial_{uv} C = f(u, v),$$
$$C(u, 0) = 0 = C(0, v), C(u, 1) = u,\ \ C(1, v) = v,$$

където функцията f удовлетворява следните условия

$f \in L_p(I^2),\ \ p \in (1, +\infty);$

$f(u, v) \geq 0,$ за всички $(u, v) \in I^2;$

$$\int_{B_{u,\mathbf{1}}} f(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = u,\ \text{ за всяко } u \in [0, 1],\ \text{ където } B_{u,1} = [0, u] \times [0, 1];$$

$$\int_{B_{\mathbf{1},v}} f(\xi, \eta) d\xi\, d\eta = v,\ \text{ за всяко } v \in [0, 1],\ \text{ където } B_{1,v} = [0, 1] \times [0, v].$$

Построяване на копули. Теорема за съществуване за $n = 2$. Обобщено решение 1/2

Теорема [Йорданов - Червенов]. Нека $f \in W^{-1,p}(I^2)$, $p > 2$ и $f \geq 0$ в слаб смисъл, т.е. $(f, \varphi) \geq 0$, за всяко $\varphi \in \mathscr{D}(I^2), \varphi \geq 0$. Нека са изпълнени условията

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\widetilde{f}, \chi_{B_{u,1}} * J_\varepsilon\right) = u, \text{ за всяко } u \in I,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\widetilde{f}, \chi_{B_{1,v}} * J_\varepsilon\right) = v, \text{ за всяко } v \in I.$$

Тогава съществува единствено решение $C \in W^{1,p}(I^2)$ на задачата:

$$C_{uv}(u,v) = f(u,v) \text{ в } I^2 \text{ (в слаб смисъл) };$$
$$C(u,0) = 0 = C(0,v); C(u,1) = u,\ C(1,v) = v$$

при условие, че

$$\left\| \mathscr{F}^{-1} \left\{ \frac{\chi_1(\xi,\eta)|\eta|}{\xi} \cdot \frac{\widehat{f}(\xi,\eta)}{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right\|_{L_p} < +\infty,$$

$$\left\| \mathscr{F}^{-1} \left\{ \frac{\overline{\chi}_1(\xi,\eta)|\xi|}{\eta} \cdot \frac{\widehat{f}(\xi,\eta)}{(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right\|_{L_p} < +\infty,$$

където χ_1 и $\overline{\chi}_1$ са гладки усредняващи функции със свойствата:

a) $\mathit{supp}\,\chi_1 \subset$ $\{$конична околност на $(0,\pm 1)\} \setminus \{$ околност на $(0,0)\}$;

b) $\mathit{supp}\,\overline{\chi}_1 \subset$ $\{$конична околност на $(\pm 1, 0)\} \setminus \{$ околност на $(0,0)\}$.

Теорема [Йорданов - Червенов]. Нека $p > n$ и функцията $f \in W^{1-n,p}(I^n)$ е такава, че:

- удовлетворява условията

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}_\varepsilon(\xi_1, \dots, \xi_n)\chi_{B_k}\, d\xi_1 \dots d\xi_n = x_k,$$

  за всяко $k = 1, \dots, n$ и за всеки паралелепипед $B_k \subset I^n$;

- е неотрицателна в смисъл на теория на разпределенията, т.е.

$$(f, \varphi) \geq 0, \text{ за всяко } \varphi \in W_0^{n-1,q}(I^n);$$

- удовлетворява условие за регулярност $(\mathscr{R})$.

Тогава съществува единствено решение $C \in W^{1,p}(I^n)$ на задачата:

1) в I^n е изпълнено

$$(-1)^n \big(C, \varphi_{x_1 \dots x_n}\big) = (f, \varphi),$$

за всяко $\varphi \in W_0^{n-1,q}(I^n)$, където q е спрегнатият индекс на p;

2) граничните условия

$$C(x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ ако } x_k = 0 \text{ за поне един индекс } k = 1, \dots, n.$$

Построяване на копули. Условие за регулярност $(\mathscr{R})$ 1/2

Функция $f \in W^{1-n,p}(I^n)$ има представянето
$(f,u) = \sum_{0\le|\alpha|\le n-1} (\partial^\alpha u, f_\alpha)$, където $f_\alpha \in L_p(I^n)$, $|\alpha| \le n-1$, за всеки елемент $u \in W^{n-1,q}(I^n)$. Ако $\alpha' = \alpha - 1$ и означим

$$\mathscr{D}_i^{\alpha_i'}\varphi = \begin{cases} \int_0^{x_i} \varphi(x_1,\dots,x_n)dx_i & \text{, когато } \alpha_i' = -1, \\ \varphi(x_1,\dots,x_n) & \text{, когато } \alpha_i' = 0, \\ \partial_i^{\alpha_i'}\varphi & \text{, когато } \alpha_i' > 0. \end{cases}$$

Условие за регулярност $(\mathscr{R})$: Нека за f_α да е изпълнено

$$\partial_{x_i}\mathscr{D}^{\alpha'} f_\alpha \in L_p(I^n),\ i = 1,\dots,n,\ |\alpha| \le n-1,$$

Построяване на копули. Условие за регулярност ($\mathscr{R}$) 2/2

Нека да сравним условието ($\mathscr{R}$) с наложените микролокални условия в двумерния случай.

За $n = 2$ ($\mathscr{R}$) има вида

$$z(x,y) = \partial_x \int\limits_0^y f(x,\eta)d\eta \in L_p(I^n).$$

Тогава $z_y = \partial_x f(x,y)$, откъдето

$$i\eta\widehat{z} = i\xi\widehat{f}(\xi,\eta), \text{ т.е. } \widehat{z} = \frac{\xi}{\eta}\widehat{f}(\xi,\eta).$$

И така $z \in L_p(I^n)$ т.с.т.к

$$\left\| \mathscr{F}^{-1}\left\{ \frac{\xi}{\eta}\widehat{f}(\xi,\eta) \right\} \right\|_{L_p} < +\infty.$$

Публикации свързани с темата

1. Iordanov I., N. Chervenov. Copulas on Sobolev spaces, Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 68, No1, pp.11-18, 2015.
2. Iordanov I., N. Chervenov. Copulas on Sobolev spaces, Serdica Math. J. 42, 335 - 360, 2016.
3. Chervenov N., I. Iordanov, B. Kostadinov. Goursat problem over unit cube in first quadrant of $\mathbb{R}^n$ (with applications to existence of copulas), AIP Conference Proceedings 2048, 040022 (2018); doi: 10.1063/1.5082094.
4. Chervenov N., B. Kostadinov, Generalisation of the Notion of an n-increasing function. Archimedean Copulas. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Vol 72, No3, pp.292-300, 2019.
5. Chervenov N., I. Iordanov, B. Kostadinov, n-dimensional copulas and week derivatives. Serdica Math. J. 44, 2018.

БЛАГОДАРЯ ЗА ВНИМАНИЕТО