ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНА ИГРА ВЪРХУ БЕЗКРАЕН ХОРИЗОНТ ПРИ НАЛИЧИЕ НА ОГРАНИЧЕНИЯ

Научна конференция ”Диференциални уравнения и математически модели в икономиката”

М. Кръстанов, Р. Розенов, Б. Стефанов

27 февруари 2023 г.

План на доклада

1. Мотивация
2. Теория на решенията и видове несигурност
3. Критерии за оптималност
4. Игрова постановка
5. Формулировка на задачата
6. Основни резултати
7. Пример

Мотивация

- Значителна част от икономическите решения се вземат в обстановка на несигурност.
- Примери: теория на потреблението, парична и фискална политика.
- Основен въпрос в икономиката е как да направим оптимален избор в условията на несигурност.

Теория на решенията и видове несигурност

Елементи на теорията на решенията:

i Несигурна величина;
ii Множество от възможни действия;
iii Резултат;
iv Критерий за оценка на резултата.

Видове несигурност:

- Стохастична (измерима) несигурност или риск – зададено е вероятностно разпределение на несигурната променлива.
- Обща (неструктурирана) несигурност – несигурната променлива се съдържа в дадено (компактно) множество.

Критерии за оптималност

Основни критерии за оптималност

- Очаквана загуба:

$$\min_{d \in D} \mathbb{E}_{\mu(n)} L(d, n)$$

- Минимаксен критерий

$$\min_{d \in D} \max_{n \in N} L(d, n),$$

където D е множеството на възможните действия, N е множеството на несигурност (състояния на природата), μ е вероятностна мярка върху сигма алгебрата на N и $L(\cdot, \cdot)$ е критерий за оценка на резултата (функция на загубата).

Критерии за оптималност (2)

Други критерии за оптималност

- Минимаксна очаквана загуба:

$$\min_{d \in D} \max_{a \in A} \mathbb{E}_{\mu_a(n)} L(d, n),$$

  където A е индексно множество (Witsenhausen, 1966; Gilboa and Scheimdler, 1989).
- Arrow and Hurwicz (1972) – претеглена средна между най-благоприятния и най-неблагоприятния изход.
- Kahneman and Tversky (1979) – асиметричност при оценката на печалби и загуби.

Игрова постановка

- Робастно управление – H^{∞}-метод и връзка с динамичната теория на игрите (Basar and Bernhard, 1995).
- Приложения в икономиката – Hansen and Sargent (2008).
- Равновесия по Неш и по Щакелберг.
- Линейно-квадратични игри – Basar and Olsder, 1999; Dockner et al.,2000; Engwerda, 2005).

Формулировка на задачата

- Динамика

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t),\ x(t_0) = x_0. \qquad (1)$$

- Критерий

$$\inf_{u \in \mathcal{U}_U} \sup_{w \in \mathcal{W}} J(x_0, t_0, u, w), \qquad (2)$$

  където

$$J(x_0, t_0, u, w) := \int_{t_0}^{\infty} \left[x_{u,w}^{\top}(t) Q x_{u,w}(t) + u^{\top}(t) R u(t) - w^{\top}(t) S w(t) \right] dt.$$

- Ограничения върху управлението на минимизиращия играч: $u : [t_0, +\infty) \to U \subset \mathbb{R}^k$.

Формулировка на задачата (2)

- Критерий при краен хоризонт:

$$J(x_0, t_0, u, w) := x(T)^\top P x(T) + \\ + \int_{t_0}^{T} \left[x_{u,w}^\top(t) Q x_{u,w}(t) + u^\top(t) R u(t) - w^\top(t) S w(t) \right] dt. \tag{3}$$

- Допустими управления при безкраен хоризонт – $u(t) \in \mathcal{U}$, (съответно $u(t) \in \mathcal{U}_U$ при наличие на ограничения) и $w(t) \in \mathcal{W}$.
- Допустими управления при краен хоризонт – $u(t) \in \mathcal{U}$, (съответно $u(t) \in \mathcal{U}_{T,U}$ при наличие на ограничения) и $w(t) \in \mathcal{W}_T$.

Основни резултати

Допускане 1. Следното алгебрично уравнение на Рикати

$$Q + XES^{-1}E^\top X - XBR^{-1}B^\top X + A^\top X + XA = 0 \tag{4}$$

има положително определено решение, по-нататък означавано с P, и всички собствени числа на матриците

$$\begin{aligned} &A, && A - BR^{-1}B^\top P, \\ &A + ES^{-1}E^\top P, && A - BR^{-1}B^\top P + ES^{-1}E^\top P \end{aligned}$$

имат отрицателни реални части.

Основни резултати (2)

Твърдение 1. Нека е изпълнено Допускане 1. Дефинираме:

$$\bar{u}(x) := -R^{-1}B^\top Px \in \mathbb{R}^k,\ \bar{w}(x) := S^{-1}E^\top Px \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

Тогава,

$$I(x_0, t_0, \bar{u}, w) \leq I(x_0, t_0, \bar{u}, \bar{w}) \leq I(x_0, t_0, u, \bar{w}) \quad (6)$$

за всяко $u \in \mathcal{U}$ и $w \in \mathcal{W}$, $(\bar{u}, \bar{w})$ е седлова точка (равновесие по Неш) за играта (2) в неограничения случай, когато $U = \mathbb{R}^k$ и освен това,

$$I(x_0, t_0, \bar{u}, \bar{w}) = x_0^\top P x_0.$$

Основни резултати (3)

Твърдение 2. Нека е изпълнено Допускане 1 и нека матрицата

$$\bar{Q} := Q + PBR^{-1}B^{\top}P - PES^{-1}E^{\top}P$$

да е положително определена. Тогава, съществува реално число $\delta > 0$ такова, че:

i) $-R^{-1}B^{\top}Px \in U$ for each $x \in \delta\bar{\mathsf{B}}$;

ii) за всяко $y \in \delta\bar{\mathsf{B}}$ и всяко $\tau \geq 0$ е изпълнено следното: $\bar{x}_{\bar{u},\bar{w}}(t, y, \tau) \in \delta\bar{\mathsf{B}}$ за всяко $t \geq \tau$;

iii) за всяко $y \in \delta\bar{\mathsf{B}}$ и всяко $\tau \geq 0$ траекторията $\bar{x}_{\bar{u},\bar{w}}(t, y, \tau)$ клони към 0 при $t \to +\infty$.

Основни резултати (4)

Твърдение 3. Нека е изпълнено Допускане 1 и нека $(\hat{u}, \hat{w}) \in \mathcal{U}_U \times \mathcal{W}$ е решение на разглежданата диференциална игра (2), т.е.

$$\bar{V}_U(x_0, t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[x_{\hat{u},\hat{w}}^\top(t) Q x_{\hat{u},\hat{w}}(t) + \hat{u}^\top(t) R \hat{u}(t) - \hat{w}^\top(t) S \hat{w}(t) \right] dt,$$

където с $x_{\hat{u},\hat{w}}$ обозначаваме решението на (1) започващо от x_0 в момент t_0 и съответстващо на управленията $\hat{u}$ и $\hat{w}$. Тогава, съществува $T \geq t_0$ такова, че $x_{\hat{u},\hat{w}}(t) \in \delta\bar{\mathbf{B}}$ за всяко $t \geq T$ и $x_{\hat{u},\hat{w}}(t)$ клони към 0 при $t \to \infty$.

Основни резултати (5)

Твърдение 4. Нека е изпълнено Допускане 1 и нека $(\hat{u}, \hat{w}) \in \mathcal{U}_{T,U} \times \mathcal{W}_T$ е решение на диференциалната игра върху краен хоризонт, т.е.

$$I_T(x_0, t_0, \hat{u}, \hat{w}) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{T,U}} \sup_{w \in \mathcal{W}_T} I_T(x_0, t_0, u, w)$$

за всяко $u \in \mathcal{U}_{T,U}$ и $w \in \mathcal{W}_T$. Предполагаме, че $\|x_{\hat{u},\hat{w}}(T)\| \leq \delta$ и дефинираме $\hat{u}_\infty$ и $\hat{w}_\infty$ както следва: $\hat{u}_\infty$ и $\hat{w}_\infty$ съвпадат съответно с $\hat{u}$ и $\hat{w}$ на интервала $[t_0, T]$; на интервала $(T, +\infty)$ те съвпадат с $\bar{u}$ и $\bar{w}$. Тогава, $\hat{u}_\infty$ и $\hat{w}_\infty$ са решение на играта върху безкраен хоризонт (2), т.е.

$$I_T(x_0, t_0, \hat{u}_\infty, \hat{w}_\infty) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{T,U}} \sup_{w \in \mathcal{W}_T} I_T(x_0, t_0, u, w).$$

Пример

Модел на парична политика (Werning, 2012; Cochrane, 2013)

$$\dot{y}(t) = \sigma^{-1}(i(t) - r(t) - \pi(t)) + w_1(t) \tag{7}$$

$$\dot{\pi}(t) = \rho\pi(t) - \kappa y(t) + w_2(t), \tag{8}$$

където y е отклонението на производството от потенциалното му ниво, π е темпът на инфлация, i е лихвеният процент (управлението на централната банка), r е равновесният реален лихвен процент, w_1, w_2 са смущения и σ, κ, ρ са параметри.

Пример (2)

Полагайки $x(t) = (y(t), \pi(t))$, $u(t) = i(t) - r(t)$ и $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$, можем да запишем системата като:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t).$$

Целта на централната банка е да избере лихвения процент така, че да минимизира загубата при най-лошия сценарий на реализация на смущенията. Функцията на загуба се задава с:

$$J(x_0, 0, u, w) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left[x^\top(t) Q x(t) + u(t)^\top R u(t) - w^\top(t) S w(t) \right] dt.$$

Пример (3)

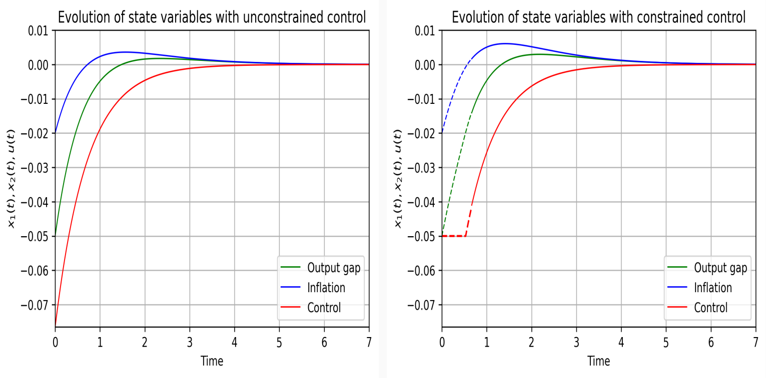
Числово решение, Borzi A., Campana F.C. (2021)

- Стойности на параметрите: Q, R са единични матрици, S е диагонална матрица със стойност 30 по главния диагонал, $\sigma = \kappa = 1$, $\rho = 0.02$, $U = [-0.05, 0.05]$, $x(0) = (-0.05, -0.02)$.
- Решение на уравнението на Рикати:

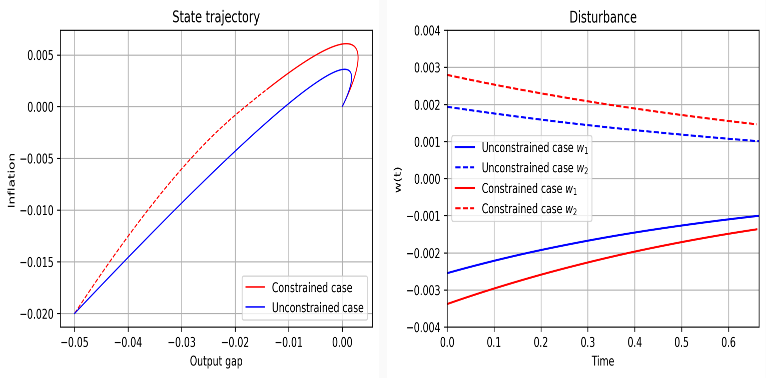
$$P = \begin{bmatrix} 2.598 & -2.669 \\ -2.699 & 3.770 \end{bmatrix}.$$

Пример (4)

Фигура: Оптимални траектории и управления



Пример (5)



Фигура: Оптимални траектории и управления (2)

Литература

- Arrow, K., Hurwicz L.(1972), An optimality criterion for decision-making under ignorance', in D. F. Carter and F. Ford (eds.), Uncertainty and Expectations in Economics, Oxford.
- Basar, T., Bernhard, P.(1995),H^{∞} optimal control and related minimax design problems: a dynamic game approach, Birkhuser, Boston.
- Basar, T., Olsder, G. (1999), Dynamic non-cooperative game theory, SIAM.
- Borzi A., Campana F.C. (2021), On the SQH method for solving differential Nash games, *J Dyn Control Syst.*

Литература (2)

- Cochrane, J. (2013), The New Keynesian liquidity trap, NBER Working Paper 19476, Cambridge, MA
- Dockner, E., Jorgensen, S., Van Long, N., Sorger, G. (2000), Differential games in economics and management science, Cambridge University Press.
- Engwerda, J. (2005), LQ dynamic optimization and differential games, John Wiley and Sons.
- Gilboa, I., Schmeidler, D. (1989), Maxmin expected utility with non-unique prior, *Journal of Mathematical Economics*, vol. 18(2), pp. 141-153.
- Hansen L, Sargent T. (2008), Robustness. Princeton University Press, Princeton.

Литература (3)

- Kahneman, D., Tversky, A. (1979), Prospect theory: an analysis of decision under risk, *Econometrica*, vol. 47(2), pp. 263-291
- Krastanov, M., Rozenov, R., Stefanov, B. (2022), On a Constrained Infinite-Time Horizon Linear Quadratic Game. *Dyn Games Appl*, https://doi.org/10.1007/s13235-022-00484-6.
- Werning, I. (2012), Managing a liquidity trap: monetary and fiscal policy, *MIT Working Paper*, Cambridge
- Witsenhausen, H. (1966), Minimax control of uncertain systems, *Report ESL-R-269*, Electronic Systems Laboratory, MIT.

Благодаря за вниманието!